1. תהי $\omega = \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$ 1-תבנית ב-$\mathbb{R}^3$.

(א) הראו שתנאי הכרחי לכך ש-$\omega = df$ לאיזו 0 תבנית f הוא ש-$d\omega = 0$. כתבו במפורש מערכת משוואות (שבה מופיעות רק הפונקציות F_i ונגזרותיהן) השקולה לתנאי $d\omega = 0$.

(ב) נניח ש-ω מוגדרת על כל $\mathbb{R}^3$ ומקיימת את התנאי מן הסעיף הקודם. לנקודה (x_1, x_2, x_3) ב-$\mathbb{R}^3$ תהי C_{x_1,x_2,x_3} המסילה המחברת בקווים ישרים את הנקודה $(0,0,0)$ ל-$(x_1,0,0)$ ואותה ל-(x_1,x_2,x_3) ואותה ל-(x_1,x_2,x_3). כתבו פרמטריזציה של המסילה C_{x_1,x_2,x_3}. נגדיר פונקציה

$$f(x_1,x_2,x_3) := \int_{C_{x_1,x_2,x_3}} \omega.$$

הראו כי

$$df = \omega.$$

(ג) תהי

$$\omega = (\frac{x_3}{x_1} - x_2)dx_1 + (x_1 + x_3)dx_2 + (\log x_1 + x_2 + 2x_3)dx_3$$

חשבו את האינטגרל

$$\int_{S_+^2} d\omega$$

כאשר

$$S_+^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1-3)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

2. תהי $\omega = f d\mathrm{x}_I$ תבנית דיפרנציאלית (כאשר I קבוצת אינדקסים).

(א) כתבו נוסחה לתבנית הדיפרנציאלית $d\omega$, והוכיחו כי $d(d\omega) = 0$. הסיקו שאם $\eta = d\alpha$ לאיזו תבנית דיפרנציאלית α אז $d\eta = 0$.

(ב) קבעו האם קיימות קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ו-0-תבנית f U כך ש-$\omega = df$ כאשר:

$$\omega = 2x_1x_2x_3dx_1 + (x_1^2 - x_1x_2^2)dx_2 + (2x_1x_2x_3 - x_2x_3^2)dx_3.$$

אם יש f כנ"ל מצאו אותה, ואם לא הוכיחו כי f כזו אינה קיימת.

3. תהי $\omega = z^2dx - 3xydy + x^3y^3dz$ ו-$\alpha = d\omega$.

(א) חשבו את α.

(ב) חשבו את

$$\int_S \alpha$$

כאשר $S \subseteq \mathbb{R}^3$ הוא המשטח הנתון ע"י

$$.\{(x,y,z) : z \geq 0,\ z = 5 - x^2 - y^2\}$$

(ג) חשבו את

$$\int_S \alpha$$

כאשר

$$.S := \{(x,y,z) : z = 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

4. חשבו את האינטגרל

$$\int_\Omega \sqrt{x^2+z^2} d\Omega$$

כאשר Ω הוא התחום החסום ע"י המישור $y = 4$ והמשטח $y = x^2 + z^2$.

5. חשבו את האינטגרל

$$\int_B xydB$$

כאשר

$$.B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + x^2 \geq 0, x, y, z \geq 0\}$$

6. תהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה כך ש-$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \neq 0$ ו-$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ לכל x, y.
נניח שגם $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ חלקה וכך שמתקיים

$$.F(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}) = 0$$

הוכיחו כי

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^n$$

לאיזה n טבעי.

7. תהי $f(x,y) = -3x^2 - 4xy - y^2 - 12y + 16x$.

(א) שרטטו בקווים כללים את קווי הגובה של הפונקציה f.

(ב) מצאו את הנקודות הקריטיות של f ומיינו אותן.

(ג) מצאו את הערך המקסימלי שמקבלת הפונקציה ברביע הראשון.